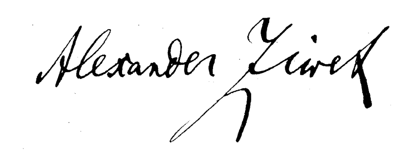
Der grossartige Aufschwung, welchen die Naturwissenschaften in unserer Zeit erfahren haben, ist, wie allgemein anerkannt wird, nicht zum kleinsten Masse durch die Ausbildung und Verbreitung der Unterrichtsmittel, der Experimentalvorlesungen, Laboratorien u. s. w., bedingt. Während aber durch die vorhandenen Einrichtungen zwar die Kenntniss des gegenwärtigen Inhaltes der Wissenschaft auf das erfolgreichste vermittelt wird, haben hochstehende und weitblickende Männer wiederholt auf einen Mangel hinweisen müssen, welcher der gegenwärtigen wissenschaftlichen Ausbildung jüngerer Kräfte nur zu oft anhaftet. Es ist dies das Fehlen des historischen Sinnes und der Mangel an Kenntniss jener grossen Arbeiten, auf welchen das Gebäude der Wissenschaft ruht.

Diesem Mangel soll durch die Herausgabe der Klassiker der exakten Wissenschaften abgeholfen werden. In handlicher Form und zu billigem Preise sollen die grundlegenden Abhandlungen der gesammten exakten Wissenschaften den Kreisen der Lehrenden und Lernenden zugänglich gemacht werden. Es soll dadurch ein Unterrichtsmittel beschafft werden, welches das Eindringen in die Wissenschaft gleichzeitig belebt und vertieft. Dasselbe ist aber auch ein Forschungsmittel von grosser Bedeutung. Denn in jenen grundlegenden Schriften ruhen nicht nur die Keime, welche inzwischen sich entwickelt und Früchte getragen haben, sondern es ruhen in ihnen noch zahllose andere Keime, die noch der Entwicklung harren, und dem in der Wissenschaft Arbeitenden und Forschenden bilden jene Schriften eine unerschöpfliche Fundgrube von Anregungen und fördernden Gedanken.

Die Klassiker der exakten Wissenschaften sollen ihrem Namen gemäss die rationellen Naturwissenschaften, von der Mathematik bis zur Physiologie umfassen und werden Abhandlungen aus den Gebieten der Mathematik, Astronomie, Physik, Chemie (einschliesslich Krystallkunde) und Physiologie enthalten.

Die allgemeine Redaktion führt von jetzt ab Professor Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig); die einzelnen Ausgaben werden durch hervorragende Vertreter der betreffenden Wissenschaften besorgt werden. Die Leitung der einzelnen Abtheilungen übernahmen: für Astronomie Prof. Dr. Bruns (Leipzig), für Mathematik Prof. Dr. Wangerin (Halle), für Krystallkunde Prof. Dr. Groth (München), für Pflanzenphysiologie Prof. Dr. W. Pfeffer (Leipzig), für Chemie Prof. Dr. W. Ostwald (Leipzig), für Physik Prof. Dr. Arthur von Oettingen (Leipzig).

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.



UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE REIHE:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdots$$

Von

N. H. ABEL.

(1826.)

Herausgegeben

von

A. Wangerin.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1895.

Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot$$

von

N. H. Abel.

(Aus Crelle's Journal Bd. I. 1826.)

I.

Untersucht man das Raisonnement, dessen man sich gewöhnlich bedient, wo es sich um unendliche Reihen handelt, genauer, so wird man finden, dass es im Ganzen wenig befriedigend, und dass also die Zahl derjenigen Sätze von unendlichen Reihen, die als streng begründet angesehen werden können, nur sehr gering ist. Man wendet gewöhnlich die Operationen der Analysis auf die unendlichen Reihen eben so an, als wären die Reihen endlich. Dies scheint mir ohne besonderen Beweis nicht erlaubt. Sind z. B. zwei Reihen mit einander zu multipliciren, so setzt man

$$\begin{aligned}(u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots)\,(v_0+v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots)\\ =u_0v_0+(u_0v_1+u_1v_0)+(u_0v_2+u_1v_1+u_2v_2)+\cdots\cdots\\ +(u_0v_n+u_1v_{n-1}+u_2v_{n-2}+\cdots\cdots+u_nv_0)+\cdots\cdots\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist vollkommen richtig, wenn die beiden Reihen

$$u_0+u_1+\cdots\cdots \text{ und } v_0+v_1+\cdots\cdots$$

endlich sind. Sind sie aber unendlich, so müssen sie erstlich nothwendig *convergiren*, weil eine divergirende Reihe keine Summe hat, und dann muss auch die Reihe auf der rechten Seite obiger Gleichung ebenfalls *convergiren*. Nur mit dieser Einschränkung ist die obige Gleichung richtig. Irre ich nicht, so ist diese Einschränkung bis jetzt nicht berücksichtigt worden. Es soll in gegenwärtigem Aufsatze geschehen. Eben so ist eine Menge

ähnlicher Operationen zu rechtfertigen nöthig, z. B. das gewöhnliche Verfahren, eine Grösse durch eine unendliche Reihe zu dividiren, eine unendliche Reihe zu einer Potenz zu erheben, den Logarithmus, den Sinus, Cosinus davon zu nehmen, u. s. w.

Ein anderes Verfahren, welches man häufig in der Analysis antrifft, und welches nur zu oft auf Widersprüche führt, ist das: divergirende Reihen zur Berechnung numerischer Werthe von Reihen zu gebrauchen. Eine divergirende Reihe kann nie einer bestimmten Grösse gleich sein: sie ist bloss ein Ausdruck mit gewissen Eigenschaften, die sich auf die Operationen beziehen, denen die [**312**] Reihe unterworfen ist. Die divergirenden Reihen können zuweilen mit Nutzen als Symbole dienen, diese oder jene Sätze kürzer auszudrücken; aber man darf sie nie an die Stelle bestimmter Grössen setzen. Thut man es, so kann man beweisen, was man will: Unmögliches sowohl als Mögliches.

Eine der merkwürdigsten Reihen der algebraischen Analysis ist folgende:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdot$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdots\cdots\cdots n}x^n+\cdots\cdots$$

Ist m eine ganze, positive Zahl, so lässt sich die Summe dieser Reihe, welche in diesem Falle endlich ist, bekanntlich durch $(1+x)^m$ ausdrücken. Ist m keine ganze Zahl, so geht die Reihe in's Unendliche fort, und sie wird convergiren oder divergiren, je nachdem die Grössen m und x diese oder jene Werthe haben. In diesem Falle setzt man nun ebenfalls die Gleichung

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}\cdot x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\cdots\cdot;$$

aber dann drückt die Gleichheit weiter nichts aus, als dass die beiden Ausdrücke

$$(1+x)^m \text{ und } 1+\frac{m}{1}\cdot x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\cdots\cdots$$

gewisse Eigenschaften gemein haben, von welchen, für gewisse Werthe von m und x, die numerische Gleichheit der Ausdrücke abhängt. Man nimmt an, dass die numerische Gleich-

heit immer stattfinden werde, wenn die Reihe convergent ist; dies ist aber bis jetzt noch nicht bewiesen worden. Es sind selbst nicht alle Fälle untersucht worden, wo die Reihe convergent ist. Selbst wenn man die Existenz der obigen Gleichung voraussetzte, müsste dennoch der Werth von $(1+x)^m$ gesucht werden; denn der Ausdruck hat im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Werthe, während die Reihe $1+mx+\cdots\cdot$ nur einen einzigen hat.

Der Zweck dieser Abhandlung ist, die Ausfüllung einer Lücke zu versuchen, und zwar durch die vollständige Auflösung des folgenden Problems:

»Die Summe der Reihe

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdot$$

für alle diejenigen reellen oder imaginären Werthe von x und m zu finden, für welche die Reihe convergirt.«

II.

Wir wollen zuerst einige nothwendige Sätze über die Reihen aufstellen. [313] Das vortreffliche Werk von *Cauchy* »*Cours d'analyse de l'école polytechnique*«[1]), welches von jedem Analysten gelesen werden sollte, der die Strenge bei mathematischen Untersuchungen liebt, wird uns dabei zum Leitfaden dienen.

Erklärung. Eine beliebige Reihe

$$v_0+v_1+v_2+\cdots+v_m+\cdots$$

soll convergent heissen, wenn, für stets wachsende Werthe von m, die Summe $v_0+v_1+\cdots+v_m$ sich einer gewissen Grenze beliebig nähert. Diese Grenze soll Summe der Reihe heissen. Im entgegengesetzten Falle soll die Reihe divergent heissen, sie hat alsdann keine Summe. Aus dieser Erklärung folgt, dass, wenn eine Reihe convergiren soll, es nothwendig und hinreichend ist, dass, für stets wachsende Werthe von m, die Summe $v_m+v_{m+1}+\cdots+v_{m+n}$ sich Null beliebig nähert, welchen Werth auch n haben mag.

In einer beliebigen convergenten Reihe wird sich daher das allgemeine Glied v_m der Null beliebig nähern*).

*) Der Kürze wegen soll in dieser Abhandlung unter ω eine Grösse verstanden werden, die kleiner sein kann, als jede gegebene, noch so kleine Grösse.

Lehrsatz I. Wenn man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots\ldots$ eine Reihe positiver Grössen bezeichnet und der Quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, für stets wachsende Werthe von m, einer Grenze α sich nähert, die grösser ist als 1: so wird die Reihe

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_m \varrho_m + \cdots\cdots,$$

worin ε_m eine Grösse ist, die, für stets wachsende Werthe von m, sich nicht beliebig der Null nähert, nothwendig divergiren.

Lehrsatz II. Wenn in einer Reihe von positiven Grössen, wie $\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_m + \cdots\cdot$, der Quotient $\frac{\varrho_{m+1}}{\varrho_m}$, für stets wachsende Werthe von m, sich einer Grenze α beliebig nähert, welche kleiner ist als 1, so wird die Reihe

$$\varepsilon_0 \varrho_0 + \varepsilon_1 \varrho_1 + \varepsilon_2 \varrho_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_m \varrho_m + \cdots\cdots,$$

worin $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdot$ Grössen sind, die die Einheit nicht übersteigen, nothwendig convergiren.

In der That kann man, der Voraussetzung zufolge, m immer gross genug annehmen, dass $\varrho_{m+1} < \alpha \varrho_m$, $\varrho_{m+2} < \alpha \varrho_{m+1}$, $\cdots\cdot$ $\varrho_{m+n} < \alpha \varrho_{m+n-1}$ ist. Hieraus folgt $\varrho_{m+k} < \alpha^k \cdot \varrho_m$, und mithin

$$\varrho_m + \varrho_{m+1} + \cdots\cdots + \varrho_{m+n} < \varrho_m (1 + \alpha + \cdots\cdot + \alpha^n) < \frac{\varrho_m}{1-\alpha},$$

[**314**] und folglich um so mehr

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \cdots\cdots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n} < \frac{\varrho_m}{1-\alpha}.$$

Da aber $\varrho_{m+k} < \alpha^k \varrho_m$ und $\alpha < 1$, so ist klar, dass ϱ_m, und folglich auch die Summe

$$\varepsilon_m \varrho_m + \varepsilon_{m+1} \varrho_{m+1} + \cdots\cdots + \varepsilon_{m+n} \varrho_{m+n}$$

Null zur Grenze haben wird.

Folglich ist die obige Reihe convergent.

Lehrsatz III. Bezeichnet man durch $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_m, \ldots$ eine Reihe von beliebigen Grössen, und ist die Grösse

$$p_m = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots\cdots + t_m$$

stets kleiner als eine bestimmte Grösse δ, so hat man

$$r = \varepsilon_0 t_0 + \varepsilon_1 t_1 + \varepsilon_2 t_2 + \cdots\cdots + \varepsilon_m t_m < \delta \cdot \varepsilon_0,$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ positive, abnehmende Grössen sind.

In der That ist

$$t_0=p_0,\, t_1=p_1-p_0,\, t_2=p_2-p_1,\, \cdots\cdots$$

also

$$r=\varepsilon_0 p_0+\varepsilon_1(p_1-p_0)+\varepsilon_2(p_2-p_1)+\cdots\cdots+\varepsilon_m(p_m-p_{m-1}),$$

oder auch

$$r=p_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)+p_1(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+\cdots\cdots+p_{m-1}(\varepsilon_{m-1}-\varepsilon_m)$$
$$+p_m\varepsilon_m.$$

Da aber $\varepsilon_0-\varepsilon_1$, $\varepsilon_1-\varepsilon_2$, ... positiv sind, so ist die Grösse r offenbar kleiner als $\delta\,.\,\varepsilon_0$.

Erklärung. Eine Function $f(x)$ soll eine stetige Function von x zwischen den Grenzen $x=a$, $x=b$ heissen, wenn für einen beliebigen Werth von x zwischen diesen Grenzen die Grösse $f(x-\beta)$ sich, für stets abnehmende Werthe von β, der Grenze $f(x)$ beliebig nähert.

Lehrsatz IV. Wenn die Reihe

$$f(\alpha)=v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots\cdots+v_m\alpha^m+\cdots\cdots$$

für einen gewissen Werth δ von α convergirt, so wird sie auch für jeden kleineren Werth von α convergiren, und von der Art sein, dass $f(\alpha-\beta)$, für stets abnehmende Werthe von β, sich der Grenze $f(\alpha)$ beliebig nähert, vorausgesetzt, dass α gleich oder kleiner ist als δ.

Es sei [2])

$$v_0+v_1\alpha+\cdots\cdots+v_{m-1}\alpha^{m-1}=\varphi(\alpha),$$
$$v_m\alpha^m+v_{m+1}\alpha^{m+1}+\cdots\cdots=\psi(\alpha),$$

so ist

[315] $$\psi(\alpha)=\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\cdot v_m\delta^m+\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1}\cdot v_{m+1}\delta^{m+1}+\cdots\cdots,$$

folglich, vermöge des Lehrsatzes (III), $\psi(\alpha)<\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m\cdot p$, wenn p die grösste der Grössen $v_m\delta^m$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}$, $v_m\delta^m+v_{m+1}\delta^{m+1}+v_{m+2}\delta^{m+2}$, ... bezeichnet. Mithin kann man für jeden Werth von α, der gleich oder kleiner ist als δ, m gross genug annehmen, dass

$$\psi(\alpha)=\omega$$

ist. Nun ist $f(\alpha)=\varphi(\alpha)+\psi(\alpha)$, also

$$f(\alpha)-f(\alpha-\beta)=\varphi(\alpha)-\varphi(\alpha-\beta)+\omega.$$

Da ferner $\varphi(\alpha)$ eine ganze Function von α ist, so kann man β klein genug annehmen, dass

$$\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta) = \omega;$$

also ist ebenfalls

$$f(\alpha) - f(\alpha - \beta) = \omega,$$

wodurch der Lehrsatz bewiesen wird.

Lehrsatz V. Es sei

$$v_0 + v_1 \delta + v_2 \delta^2 + \cdots\cdots$$

eine convergente[3]) Reihe, in welcher v_0, v_1, v_2, ... continuirliche Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse x sind zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$, so ist die Reihe

$$f(x) = v_0 + v_1 \alpha + v_2 \alpha^2 + \cdots\cdots,$$

wo $\alpha < \delta$, convergent und eine stetige Function von x zwischen denselben Grenzen.

Es ist schon bewiesen, dass die Reihe $f(x)$ convergirt. Dass die Function $f(x)$ stetig ist, lässt sich, wie folgt, beweisen.

Es sei

$$v_0 + v_1 \alpha + \cdots\cdots + v_{m-1} \alpha^{m-1} = \varphi(x),$$
$$v_m \alpha^m + v_{m+1} \alpha^{m+1} + \cdots\cdots = \psi(x),$$

so ist

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x).$$

Da aber

$$\psi(x) = \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot v_m \delta^m + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+1} v_{m+1} \delta^{m+1} + \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^{m+2} v_{m+2} \delta^{m+2} + \cdots\cdots,$$

so hat man, wenn man durch $\theta(x)$ die grösste unter den Grössen $v_m \delta^m$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1}$, $v_m \delta^m + v_{m+1} \delta^{m+1} + v_{m+2} \delta^{m+2}$, ... bezeichnet, vermöge des Lehrsatzes (III):

$$\psi(x) < \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m \cdot \theta(x).$$

[**316**] Hieraus folgt, dass man m gross genug nehmen kann, dass $\psi(x) = \omega$, und daher auch

$$f(x) = \varphi(x) + \omega$$

wird, wo ω kleiner ist, als jede angebbare Grösse.

Es ist ebenso

$$f(x-\beta)=\varphi(x-\beta)+\omega,$$

also

$$f(x)-f(x-\beta)=\varphi(x)-\varphi(x-\beta)+\omega.$$

Dem Ausdruck von $\varphi(x)$ zufolge ist aber klar, dass man β klein genug annehmen kann, dass

$$\varphi(x)-\varphi(x-\beta)=\omega$$ [4])

wird, und daraus folgt

$$f(x)-f(x-\beta)=\omega.$$

Also ist die Function $f(x)$ stetig*).

Lehrsatz VI. Bezeichnet man durch $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots\ldots$ $\varrho_0', \varrho_1', \varrho_2', \ldots\ldots$ die Zahlenwerthe der resp. Glieder zweier convergenten Reihen

$$v_0+v_1+v_2+\cdots\cdots=p \text{ und}$$
$$v_0'+v_1'+v_2'+\cdots\cdots=p',$$

und sind die Reihen

$$\varrho_0+\varrho_1+\varrho_2+\cdots\cdots \text{ und}$$
$$\varrho_0'+\varrho_1'+\varrho_2'+\cdots\cdots$$

ebenfalls convergent, so ist auch die Reihe

$$r_0+r_1+r_2+\cdots+r_m+\cdots,$$

deren allgemeines Glied

---

*) In dem oben angeführten Werke des Herrn *Cauchy* (S. 131) findet man folgenden Lehrsatz:

»Wenn die verschiedenen Glieder der Reihe

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse x sind, und zwar stetige Functionen in Beziehung auf diese Veränderliche in der Nähe eines besonderen Werthes, für welchen die Reihe convergirt, so ist auch die Summe s der Reihe in der Nähe jenes besonderen Werthes eine stetige Function von x.«

Es scheint mir, dass dieser Lehrsatz Ausnahmen leidet. So ist z. B. die Reihe

$$\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots\cdots$$

unstetig für jeden Werth $(2m+1)\pi$ von φ, wo m eine ganze Zahl ist. Bekanntlich giebt es eine Menge von Reihen mit ähnlichen Eigenschaften [5]).

$$r_m = v_0 v_m' + v_1 v'_{m-1} + v_2 v'_{m-2} + \cdots + v_m v_0',$$

convergent, und ihre Summe ist

[317] $(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots) \times (v'_0 + v'_1 + v'_2 + \cdots)$. [6)]

Beweis. Setzt man

$$p_m = v_0 + v_1 + \cdots + v_m,$$
$$p'_m = v'_0 + v'_1 + \cdots + v'_m,$$

so sieht man leicht, dass

$$\left.\begin{aligned} r_0 + r_1 + r_2 + \cdots + r_{2m} = p_m p'_m \\ + (p_0 v'_{2m} + p_1 v'_{2m-1} + \cdots + p_{m-1} v'_{m+1} (= t) \\ + p'_0 v_{2m} + p'_1 v_{2m-1} + \cdots + p'_{m-1} v_{m+1} (= t')) . \end{aligned}\right\} (a)$$

Setzt man nun

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots = u,$$
$$\varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \cdots = u',$$

so ist klar, dass, ohne Rücksicht auf das Zeichen,

$$t < u(\varrho'_{2m} + \varrho'_{2m-1} + \cdots + \varrho'_{m+1}),$$
$$t' < u'(\varrho_{2m} + \varrho_{2m-1} + \cdots + \varrho_{m+1}).$$

Da aber die Reihen

$$\varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots, \quad \varrho'_0 + \varrho'_1 + \varrho'_2 + \cdots$$

convergent sind, so werden sich die Grössen t und t', für stets zunehmende Werthe von m, der Grenze Null beliebig nähern. Setzt man also in der Gleichung (a) m unendlich gross, so ist

$$r_0 + r_1 + r_2 + r_3 + \cdots =$$
$$(v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)(v'_0 + v'_1 + v'_2 + \cdots).$$

Gesetzt, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t'_0, t'_1, t'_2, \ldots$ seien zwei Reihen positiver und negativer Grössen, deren allgemeine Glieder sich der Null beliebig nähern, so folgt aus dem Lehrsatze (II), dass die Reihen

$$t_0 + t_1 \alpha + t_2 \alpha^2 + \cdots, \quad t'_0 + t'_1 \alpha + t'_2 \alpha^2 + \cdots,$$

worin α eine Grösse bezeichnet, die kleiner ist als 1, convergent sein müssen. Es verhält sich eben so, wenn man jedem Gliede seinen Zahlenwerth giebt, also ist zufolge des vorhergehenden Lehrsatzes:

$$\left.\begin{aligned}&(t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\cdots\cdots)(t'_0+t'_1\alpha+t'_2\alpha^2+\cdots\cdots)=\\&t_0t'_0+(t_1t'_0+t_0t'_1)\alpha+(t_2t'_0+t_1t'_1+t_0t'_2)\alpha^2+\cdots\cdots\\&\quad+(t_mt'_0+t_{m-1}t'_1+t_{m-2}t'_2+\cdots\cdots+t_0t'_m)\alpha^m\\&\qquad+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(b)$$

Nimmt man nun an, dass die drei Reihen

$$t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots,$$
$$t'_0+t'_1+t'_2+\cdots\cdots \text{ und}$$
$$t_0t'_0+(t_1t'_0+t_0t'_1)+(t_2t'_0+t_1t'_1+t_0t'_2)+\cdots\cdots$$

[**318**] convergent sind, so findet man, vermöge des Lehrsatzes (IV), wenn man in der Gleichung (b) α der Einheit sich nähern lässt:

$$(t_0+t_1+t_2+\cdots\cdots)(t'_0+t'_1+t'_2+\cdots\cdots)=$$
$$t_0t'_0+(t_1t'_0+t_0t'_1)+(t_2t'_0+t_1t'_1+t_0t'_2)+\cdots\cdots$$

III.

Wir wollen jetzt die gegebene Reihe

$$1+\frac{m}{1}\cdot x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\cdots\cdots\cdots$$

untersuchen.

Bezeichnet man sie durch $\varphi(m)$, und setzt man, der Kürze wegen, $1=m_0$, $\frac{m}{1}=m_1$, $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}=m_2$, und allgemein $\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\ldots\mu}=m_\mu$, so ist:

(1) $\varphi(m)=m_0+m_1x+m_2x^2+\cdots+m_\mu x^\mu+\cdots\cdots$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Werthe von m und x zu finden, für welche die Reihe convergirt.

Da die Grössen m und x im Allgemeinen auch imaginär sein können, so sei

$$x=a+bi,\ m=k+k'i,$$

wo a, b, k, k', reelle Grössen sind. Substituirt man diese Werthe in Gleichung (1), so nimmt dieselbe folgende Form. an:

$$\varphi(m)=p+qi,$$

wo p und q Reihen sind, deren Glieder reelle Werthe haben. Man kann diese Reihen, wie folgt, finden:

Es sei

$$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}=\alpha,\ \frac{a}{\alpha}=\cos\varphi,\ \frac{b}{\alpha}=\sin\varphi,$$

so ist

$$x=\alpha(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi),$$

wo α und φ zwei reelle Grössen sind und α ausserdem positiv ist.

Setzt man ebenso

$$\frac{m-\mu+1}{\mu}=\delta_\mu\cdot(\cos\gamma_\mu+i\cdot\sin\gamma_\mu)=\frac{k+k'i-\mu+1}{\mu}:$$

so findet man

$$\delta_\mu=\left(\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos\gamma_\mu=\frac{k-\mu+1}{\mu\delta_\mu};\quad \sin\gamma_\mu=\frac{k'}{\mu\delta_\mu}.$$

[**319**] Setzt man in dem Ausdruck:

$$\frac{m-\mu+1}{\mu}=\delta_\mu(\cos\gamma_\mu+i\cdot\sin\gamma_\mu)$$

μ der Reihe nach gleich 1, 2, 3, ..., μ, so bekommt man μ Gleichungen, welche, Glied für Glied mit einander multiplicirt,

$$m_\mu=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \mu}$$
$$=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\ldots\delta_\mu[\cos(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)$$
$$+i\cdot\sin(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)]$$

geben werden.

Hieraus folgt, wenn man mit

$$x^\mu=\alpha^\mu(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)^\mu=\alpha^\mu(\cos\mu\varphi+i\cdot\sin\mu\varphi)$$

multiplicirt:

$$m_\mu x^\mu=\alpha^\mu\cdot\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\ldots\delta_\mu[\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots\cdots+\gamma_\mu)$$
$$+i\cdot\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots\cdots+\gamma_\mu)],$$

oder auch, wenn man der Kürze wegen

$$\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\ldots\delta_\mu=\lambda_\mu,$$

$$\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots\cdot+\gamma_\mu=\theta_\mu \text{ setzt:}$$

$$m_\mu\cdot x^\mu=\lambda_\mu\cdot\alpha^\mu\{\cos\theta_\mu+i\cdot\sin\theta_\mu\}.$$

Der Ausdruck (1) geht dadurch in

$$\varphi(m)=1+\lambda_1\,\alpha(\cos\theta_1+i\cdot\sin\theta_1)+\lambda_2\,\alpha^2(\cos\theta_2+i\cdot\sin\theta_2)$$
$$+\cdots\cdot+\lambda_\mu\,\alpha^\mu(\cos\theta_\mu+i\cdot\sin\theta_\mu)+\cdots\cdot,$$

oder in

$$\varphi(m)=$$
$$1+\lambda_1\,\alpha\cdot\cos\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\cdot\cos\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots\cdot$$
$$+i\{\lambda_1\,\alpha\cdot\sin\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\cdot\sin\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cdot\sin\theta_\mu+\cdots\cdot\}$$

über; also ist

$$(2)\quad\begin{cases}p=1+\lambda_1\,\alpha\cdot\cos\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\cdot\cos\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cdot\cos\theta_\mu\\ \qquad+\cdots\cdot,\\ q=\qquad\lambda_1\,\alpha\cdot\sin\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\cdot\sin\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cdot\sin\theta_\mu\\ \qquad+\cdots\cdot\end{cases}$$

Nun behaupte ich, dass diese Reihen divergiren oder convergiren, je nachdem α grösser oder kleiner als 1 ist.

Aus dem Ausdruck für λ_μ folgt $\lambda_{\mu+1}=\delta_{\mu+1}\cdot\lambda_\mu$, also $\lambda_{\mu+1}\cdot\alpha^{\mu+1}=\alpha\,\delta_{\mu+1}\cdot\lambda_\mu\,\alpha^\mu$, und

$$\frac{\lambda_{\mu+1}\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\,\alpha^\mu}=\alpha\,\delta_{\mu+1}.$$

[**320**] Es ist aber

$$\delta_{\mu+1}=\left(\left(\frac{k-\mu}{\mu+1}\right)^2+\left(\frac{k'}{\mu+1}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

also wird sich δ_μ, für stets wachsende Werthe von μ, der Grenze 1, und folglich $\frac{\lambda_{\mu+1}\,\alpha^{\mu+1}}{\lambda_\mu\,\alpha^\mu}$ der Grenze α nähern. Mithin sind, vermöge der Lehrsätze (I) und (II) im vorhergehenden Paragraph, die Reihen p und q divergent oder convergent, je nachdem α grösser oder kleiner ist, als die Einheit. Mit der gegebenen Reihe $\varphi(m)$ verhält es sich folglich ebenso.

Der Fall, wo $\alpha = 1$ ist, wird weiter unten behandelt werden.

Da die Reihe $\varphi(m)$ für jeden Werth von α convergirt, der kleiner ist als 1: so wird ihre Summe eine gewisse Function von m und x sein. Man kann auf folgende Art eine Eigenschaft dieser Function aufstellen, welche dazu dienen kann, sie zu finden:

Es ist

$$\varphi(m) = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \cdots + m_\mu x^\mu + \cdots,$$
$$\varphi(n) = n_0 + n_1 x + n_2 x^2 + \cdots + n_\mu x^\mu + \cdots,$$

wo n_μ den Werth von m_μ für $m = n$ bezeichnet. Hieraus ergiebt sich nach dem Lehrsatz (VI):

$$\varphi(m)\cdot\varphi(n) = t_0 t'_0 + (t_0 t'_1 + t_1 t'_0) + (t_0 t'_2 + t_1 t'_1 + t_2 t'_0) + \cdots$$
$$+ (t_0 t'_\mu + t_1 t'_{\mu-1} + t_2 t'_{\mu-2} + \cdots + t_\mu t'_0) + \cdots,$$

wo $t_\mu = m_\mu x^\mu$; $t'_\mu = n_\mu x^\mu$, sobald die Reihe auf der rechten Seite convergent ist. Substituirt man die Werthe von t_μ und t'_μ, so erhält man

$$\varphi(m)\cdot\varphi(n) =$$
$$m_0 n_0 + (m_0 n_1 + m_1 n_0)x + (m_0 n_2 + m_1 n_1 + m_2 n_0)x^2 + \cdots$$
$$+ (m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0)x^\mu + \cdots$$

Nun ist, vermöge einer den Grössen m_μ gemeinsamen Eigenschaft

$$(m+n)_\mu = m_0 n_\mu + m_1 n_{\mu-1} + m_2 n_{\mu-2} + \cdots + m_\mu n_0,$$

wo $(m+n)_\mu$ den Werth von m_μ bezeichnet, wenn man darin $m+n$ statt m setzt. Mithin erhält man durch Substitution:

$$\varphi(m)\cdot\varphi(n) = (m+n)_0 + (m+n)_1 x + (m+n)_2 x^2 + \cdots$$
$$+ (m+n)_\mu x^\mu + \cdots$$

Aber nach dem Vorhergehenden ist das Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung eine convergente Reihe, und genau dasselbe wie $\varphi(m+n)$. Also ist

(3) $$\varphi(m)\cdot\varphi(n) = \varphi(m+n).$$

Diese Gleichung drückt eine Grund-Eigenschaft der Function $\varphi(m)$ aus. [**321**] Wir wollen jetzt aus derselben den Ausdruck der Function in endlicher Form vermittelst Exponential-Grössen, logarithmischer und Kreis-Functionen herleiten.

Wie man oben sah, ist $\varphi(m)$ von der Form $p + q i$, wo

p und q stets reell und Functionen der Grössen k, k', α und φ sind, während $m=k+k'i$, $x=\alpha(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$ ist. Man setze

$$p+qi=r(\cos s+i\cdot\sin s),$$

so findet man

$$(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}=r,\ \frac{p}{r}=\cos s,\ \frac{q}{r}=\sin s,$$

wo r stets positiv und s eine reelle Grösse ist. Man setze

$$r=f(k,k'),\quad s=\psi(k,k'),$$

so ist

$$(3')\ p+qi=\varphi(k+k'i)=f(k,k')[\cos\psi(k,k')+i\cdot\sin\psi(k,k')].$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man nach und nach l und l', und $k+l$ und $k'+l'$ an die Stelle von k und k' setzt:

$$\varphi(l+l'i)=f(l,l')[\cos\psi(l,l')+i\cdot\sin\psi(l,l')],$$

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]=f(k+l,k'+l')\cdot[\cos\psi(k+l,k'+l') + i\cdot\sin\psi(k+l,k'+l')].$$

Aber vermöge der Gleichung $\varphi(m)\cdot\varphi(n)=\varphi(m+n)$ ist

$$\varphi[k+l+(k'+l')i]=\varphi(k+k'i)\cdot\varphi(l+l'i),$$

wenn man $m=k+k'i$, $n=l+l'i$ setzt. Folglich erhält man durch Substitution:

$$f(k+l,k'+l')\{\cos\psi(k+l,k'+l')+i\cdot\sin\psi(k+l,k'+l')\} =f(k,k')\cdot f(l,l')\{\cos[\psi(k,k')+\psi(l,l')]+i\cdot\sin[\psi(k,k')+\psi(l,l')]\}.$$

Diese Gleichung giebt, wenn man die reellen Glieder von den imaginären absondert:

$$f(k+l,k'+l')\cdot\cos\psi(k+l,k'+l') =f(k,k')\cdot f(l,l')\cdot\cos\{\psi(k,k')+\psi(l,l')\},$$

$$f(k+l,k'+l')\cdot\sin\psi(k+l,k'+l') =f(k,k')\cdot f(l,l')\cdot\sin\{\psi(k,k')+\psi(l,l')\}.$$

Quadrirt und addirt man diese Gleichungen, so erhält man:

$$[f(k+l,k'+l')]^2=[f(k,k')\cdot f(l,l')]^2$$

und hieraus:

[322] (4) $$f(k+l, k'+l') = f(k, k') \cdot f(l, l').$$

Vermöge dieser Gleichung gehen die obigen in folgende über:

$$\cos\psi(k+l, k'+l') = \cos\{\psi(k, k') + \psi(l, l')\},$$
$$\sin\psi(k+l, k'+l') = \sin\{\psi(k, k') + \psi(l, l')\}.$$

Diese Gleichungen geben

(5) $$\psi(k+l, k'+l') = 2M\pi + \psi(k, k') + \psi(l, l'),$$

wo M eine ganze, positive oder negative Zahl ist [7]).

Jetzt kommt es darauf an, aus den Gleichungen (4) und (5) die Functionen $f(k, k')$ und $\psi(k, k')$ zu finden.

Zuerst behaupte ich, dass sie stetige Functionen von k und k', zwischen beliebigen Grenzen dieser veränderlichen Grössen, sein werden. In der That sind p und q, nach dem Lehrsatze (V), offenbar stetige Functionen [8]). Es ist aber

$$f(k, k') = (p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$\cos\psi(k, k') = \frac{p}{f(k, k')}; \quad \sin\psi(k, k') = \frac{q}{f(k, k')};$$

folglich ist $f(k, k')$ eine stetige Function; ebenso $\cos\psi(k, k')$ und $\sin\psi(k, k')$. Daher kann man voraussetzen, dass es $\psi(k, k')$ ebenfalls ist. Wir wollen zuerst die Gleichung (5) untersuchen. Da $\psi(k, k')$ eine stetige Function ist, so muss M für alle Werthe von k, k', l, l' denselben Werth haben. Setzt man also der Reihe nach $l = 0$, $k = 0$, so erhält man

$$\psi(k, k'+l') = 2M\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l'),$$
$$\psi(l, k'+l') = 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(l, l').$$

Eliminirt man zwischen diesen Gleichungen und der Gleichung (5) die beiden Grössen $\psi(k, k')$ und $\psi(l, l')$, so findet man

$$\psi(k, k'+l') + \psi(l, k'+l') = 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') + \psi(k+l, k'+l').$$

Der Kürze wegen sei

(6) $$\begin{cases} \psi(k, k'+l') = \theta(k), \\ 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l') = a, \end{cases}$$

so ist

(7) $$\theta(k)+\theta(l)=a+\theta(k+l).$$

Setzt man hierin der Reihe nach $l=k,\ 2k,\ldots,\ \varrho k$, so erhält man:

$$2\theta(k)=a+\theta(2k),$$
$$\theta(k)+\theta(2k)=a+\theta(3k),$$
$$\theta(k)+\theta(3k)=a+\theta(4k),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\theta(k)+\theta[(\varrho-1)k]=a+\theta(\varrho k).$$

Addirt man diese Gleichungen, so findet man

[**323**] (7') $$\varrho\,\theta(k)=(\varrho-1)a+\theta(\varrho k).$$

Hieraus folgt, wenn man $k=1$ setzt,

$$\theta(\varrho)=\varrho\big(\theta(1)-a\big)+a,$$

oder auch, wenn man $\theta(1)-a=c$ setzt,

(8) $$\theta(\varrho)=c\cdot\varrho+a.$$

Diesen Werth hat also die Function $\theta(k)$, wenn k eine ganze Zahl ist. Aber die Function $\theta(k)$ wird für alle Werthe von k dieselbe Form haben, was sich leicht, wie folgt, beweisen lässt:

Setzt man in der Gleichung (7') $k=\frac{\mu}{\varrho}$, wo μ eine ganze Zahl ist, so ist $\varrho\cdot\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=(\varrho-1)a+\theta(\mu)$. Aber vermöge der Gleichung (8) ist

$$\theta(\mu)=c\cdot\mu+a.$$

Mithin findet man, wenn man substituirt und durch ϱ dividirt:

$$\theta\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)=c\cdot\frac{\mu}{\varrho}+a.$$

Die Gleichung (8) findet daher für alle positiven und rationalen Werthe von ϱ statt. Gesetzt nun, l sei $=-k$, so geht die Gleichung (7) in

$$\theta(k)+(\theta-k)=a+\theta(0)$$

über. Hieraus folgt, wenn man $k=0$ setzt:

$$\theta(0)=a, \text{ und folglich } \theta(-k)=2a-\theta(k).$$

Ist aber k rational und positiv, so erhält man

$$\theta(k) = c \cdot k + a, \text{ also } \theta(-k) = -c \cdot k + a.$$

Die Gleichung

(9) $$\theta(k) = c \cdot k + a$$

findet also allgemein für alle rationalen Werthe von k, und folglich, weil $\theta(k)$ eine stetige Function ist, für alle reellen Werthe von k statt.

Nun ist

$$\theta(k) = \psi(k, k' + l') \text{ und } a = 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l');$$

setzt man also $c = \theta(k', l')$, so erhält man

(10) $$\psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \cdot k + 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $k = 0$ setzt,

$$\psi(0, k' + l') = 2M\pi + \psi(0, k') + \psi(0, l').$$

Da diese Gleichung dieselbe Form hat, wie die Gleichung (7), so wird sie auf dieselbe Weise:

$$\psi(0, k') = \beta' \cdot k' - 2M\pi$$

geben, wo β' eine von k' unabhängige Grösse ist.

[**324**] Setzt man l' an die Stelle von k', so erhält man $\psi(0, l') = -2M\pi + \beta' l'$.

Substituirt man diese Werthe von $\psi(0, k')$ und $\psi(0, l')$ in Gleichung (10), so ergiebt sich

$$\psi(k, k' + l') = \theta(k', l') \cdot k + \beta'(k' + l') - 2M\pi.$$

Hieraus sieht man, dass $\theta(k', l')$ eine Function von $k' + l'$ ist. Bezeichnet man sie durch $F(k' + l')$, so ist

$$\psi(k, k' + l') = F(k' + l') \cdot k + \beta'(k' + l') - 2M\pi,$$

und folglich, wenn man $l' = 0$ setzt,

$$\psi(k, k') = F(k') \cdot k + \beta' k' - 2M\pi.$$

Erwägt man, dass

$$\psi(k, k' + l') = 2M\pi + \psi(k, k') + \psi(0, l')^{9)},$$
$$\psi(0, l') = \beta' l' - 2M\pi,$$

so giebt die obige Gleichung

$$F(k' + l') \cdot k + \beta'(k' + l') - 2M\pi$$
$$= 2M\pi + F(k') \cdot k + \beta' k' - 2M\pi + \beta' l' - 2M\pi,$$

das heisst:

$$F(k' + l') = F(k').$$

Setzt man also $k'=0$, so ist $F(l')=F(0)=\beta=F(k')$. Der Werth von $\psi(k,k')$ geht also schliesslich in

(11) $$\psi(k,k')=\beta\cdot k+\beta'\cdot k'-2M\pi$$

über, wo β und β' zwei Constanten sind. Dieser Werth von $\psi(k,k')$ wird in der That der Gleichung (5) ganz allgemein Genüge leisten, wie leicht zu sehen.

Jetzt wollen wir die Gleichung

$$f(k+l,k'+l')=f(k,k')\cdot f(l,l')$$

untersuchen. Da $f(k,k')$ immer eine positive Grösse ist, so kann man setzen:

$$f(k,k')=e^{F(k,k')},$$

wo $F(k,k')$ eine reelle, stetige Function von k und k' bedeutet. Substituirt man und nimmt die Logarithmen der beiden Glieder, so findet man

$$F(k+l,k'+l')=F(k,k')+F(l,l').$$

Da diese Gleichung mit der Gleichung (5) übereinstimmt, wenn man F statt ψ, und 0 statt M setzt, so giebt sie, vermöge der Gleichung (11):

(12) $$F(k,k')=\delta\cdot k+\delta'\cdot k',$$

wo δ und δ', ebenso wie β und β', zwei von k und k' unabhängige Grössen sind. Die Function $f(k,k')$ geht also in

$$f(k,k')=e^{\delta k+\delta' k'}$$

[**325**] über.

Nachdem auf diese Weise die Functionen $\psi(k,k')$ und $f(k,k')$ gefunden worden, hat man, vermöge der Gleichung (3')

(13) $$\varphi(k+k'i)=e^{\delta k+\delta' k'}[\cos(\beta k+\beta' k')+i\cdot\sin(\beta k+\beta' k')],$$

worin noch die Grössen δ, δ', β, β', die nur Functionen von α und φ sein können, gefunden werden müssen.

Es ist

$$\varphi(k+k'i)=p+qi,$$

wo p und q durch die Gleichungen (2) gegeben sind. Sondert man die reellen Grössen von den imaginären ab, so ist:

$$(14)\quad\begin{cases} e^{\delta k+\delta' k'}\cdot\cos(\beta k+\beta' k') = 1+\lambda_1\,\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\cos\theta_2 \\ \qquad +\cdots+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cdot\cos\theta_\mu+\cdots, \\ e^{\delta k+\delta' k'}\cdot\sin(\beta k+\beta' k') = \lambda_1\,\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\,\alpha^2\sin\theta_2 \\ \qquad +\cdots+\lambda_\mu\,\alpha^\mu\cdot\sin\theta_\mu+\cdots \end{cases}$$

Wir wollen nun zuerst den Fall betrachten, wo m reell, d. h., wo $k'=0$ ist. Alsdann gehen die Ausdrücke (12.) in

$$(15)\quad\begin{cases} e^{\delta k}\cdot\cos\beta k = 1+\frac{k}{1}\cdot\alpha\cos\varphi+\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi \\ \quad +\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots = f(\alpha), \\ e^{\delta k}\cdot\sin\beta k = \frac{k}{1}\cdot\alpha\sin\varphi+\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\sin 2\varphi \\ \quad +\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots = \theta(\alpha) \end{cases}$$

über. Um δ und β zu finden, setze man $k=1$, so erhält man:

$$e^\delta\cos\beta = 1+\alpha\cos\varphi;\quad e^\delta\sin\beta=\alpha\sin\varphi.$$

Hieraus folgt:

$$e^\delta = (1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\beta = \frac{1+\alpha\cos\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},\quad \sin\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt, wenn man durch s den kleinsten aller Werthe von β bezeichnet, welcher ihr genügt und welcher immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen wird,

$$\beta = s+\mu\pi,$$

wo μ eine ganze positive oder negative Zahl ist.

Daher gehen die Gleichungen (15) in

$$f(\alpha)=e^{\delta k}\cdot\cos k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\cdot\cos ks\cdot\cos k\mu\pi$$
$$-e^{\delta k}\cdot\sin ks\cdot\sin k\mu\pi,$$
$$\theta(\alpha)=e^{\delta k}\cdot\sin k(s+\mu\pi)=e^{\delta k}\cdot\sin ks\cdot\cos k\mu\pi$$
$$+e^{\delta k}\cdot\cos ks\cdot\cos k\mu\pi$$

über. Aus diesen Gleichungen folgt:

[326] $$\cos k\mu\pi=e^{-\delta k}[f(\alpha)\cdot\cos ks+\theta(\alpha)\cdot\sin ks],$$
$$\sin k\mu\pi=e^{-\delta k}[\theta(\alpha)\cdot\cos ks-f(\alpha)\cdot\sin ks].$$

Aber nach dem Lehrsatz (IV) sind $\theta(\alpha)$ und $f(\alpha)$ stetige Functionen von α, es müssen also $\cos k\mu\pi$ und $\sin k\mu\pi$ die nämlichen Werthe für alle Werthe von α behalten. Daher ist es, um sie zu finden, hinreichend, α einen beliebigen Werth beizulegen. Es sei α gleich 0, so erhält man, wenn man erwägt, dass alsdann $e^{\delta}=1$, $f(\alpha)=1$, $\theta(\alpha)=0$, $s=0$ ist:

$$\cos k\mu\pi=1,\quad \sin k\mu\pi=0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Ausdrücke von $f(\alpha)$ und $\theta(\alpha)$, und erinnert sich, dass $e^{\delta}=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$ ist, so erhält man:

$$f(\alpha)=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cdot\cos ks;$$
$$\theta(\alpha)=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cdot\sin ks.$$

Die Ausdrücke (15) gehen also schliesslich über in:

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&1+\frac{k}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi\\&+\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots\\&\quad=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cdot\cos ks,\\&\frac{k}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{k\cdot(k-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\sin 2\varphi\\&+\frac{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots\\&\quad=(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{k}{2}}\cdot\sin ks,\end{aligned}\right.$$

wo s eine zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ enthaltene Grösse ist, welche der Gleichung

$$\operatorname{tang} s = \frac{\alpha \cdot \sin \varphi}{1 + \alpha \cos \varphi}$$

genügt.

Die Ausdrücke (16) sind zuerst von *Cauchy* in der oben angeführten Schrift aufgestellt worden.

Die Grösse α ist hier kleiner als 1 angenommen. Weiter unten wird sich zeigen, dass auch $\alpha = 1$ sein kann, wenn die Grösse k einen angemessenen Werth bekommt.

Im Vorhergehenden haben wir die Grössen δ und β gefunden. Jetzt wollen wir zeigen, wie sich die beiden anderen unbekannten Grössen δ' und β' finden lassen. Setzt man zu dem Ende in (14) $k = 0$ und $k' = n$, so erhält man

$$e^{\delta' n} \cdot \cos(\beta' n) = 1 + \lambda_1 \alpha \cos \theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \cos \theta_2 + \cdots,$$
$$e^{\delta' n} \cdot \sin(\beta' n) = \lambda_1 \alpha \sin \theta_1 + \lambda_2 \alpha^2 \sin \theta_2 + \cdots,$$

wo

[327] $\lambda_\mu = \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \delta_3 \cdots \delta_\mu, \; \theta_\mu = \mu \varphi + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_\mu$

ist, während δ_μ und γ_μ durch die Gleichungen

$$\delta_\mu = \left(\left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{n}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \cos \gamma_\mu = -\frac{\mu - 1}{\mu \delta_\mu}, \quad \sin \gamma_\mu = \frac{n}{\mu \delta_\mu}$$

bestimmt sind.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich folgende:

$$\frac{e^{\delta' n} \cdot \cos(\beta' n) - 1}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \cdot \alpha \cos \theta_1 + \frac{\lambda_2}{n} \alpha^2 \cos \theta_2 + \cdots,$$
$$\frac{e^{\delta' n} \cdot \sin(\beta' n)}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \cdot \alpha \sin \theta_1 + \frac{\lambda_2}{n} \alpha^2 \sin \theta_2 + \cdots$$

Man hat aber, unter der Voraussetzung, dass n positiv ist: $\lambda_1 = \delta_1 = n$, also $\frac{\lambda_\mu}{n} = \delta_2 \cdot \delta_3 \ldots\ldots \delta_\mu$, folglich

$$\frac{e^{\delta' n}\cdot\cos(\beta' n)-1}{n}=\alpha\cos\theta_1+\delta_2\,\alpha^2\cos\theta_2+\delta_2\,\delta_3\,\alpha^3\cos\theta_3+\cdots,$$

$$\frac{e^{\delta' n}\cdot\sin(\beta' n)}{n}=\alpha\sin\theta_1+\delta_2\,\alpha^2\sin\theta_2+\delta_2\,\delta_3\,\alpha^3\sin\theta_3+\cdots.$$

Diese Reihen convergiren für jeden Werth von n, Null mitbegriffen, wie aus dem Lehrsatze (II) leicht zu sehen. Lässt man daher n sich der Grenze Null nähern und erwägt, dass die Reihen, nach dem Lehrsatze (V), stetige Functionen sind [8]), so erhält man

$$\delta'=\alpha\cos\theta'_1+\delta'_2\,\alpha^2\cos\theta'_2+\delta'_2\,\delta'_3\,\alpha^3\cos\theta'_3+\cdots,$$
$$\beta'=\alpha\sin\theta'_1+\delta'_2\,\alpha^2\sin\theta'_2+\delta'_2\,\delta'_3\,\alpha^3\sin\theta'_3+\cdots,$$

da δ' und β' die Grenzen der Grössen $\frac{e^{\delta' n}\cdot\cos(\beta' n)-1}{n}$ und $\frac{e^{\delta' n}\cdot\sin(\beta' n)}{n}$ sind. θ'_μ ist die Grenze von θ_μ, und δ'_μ diejenige von δ_μ. Nun ist, zufolge des Ausdrucks von δ_μ, $\delta'_\mu=\frac{\mu-1}{\mu}$; also $\cos\gamma_\mu=-1$; $\sin\gamma_\mu=0$ (wenn $\mu>1$), folglich:

$$\cos(\theta'_\mu)=\cos(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=+\sin(\mu\varphi)\cdot(-1)^{\mu}\ ^{10}),$$
$$\sin(\theta'_\mu)=\sin(\mu\varphi+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\mu)=-\cos(\mu\varphi)\cdot(-1)^{\mu},$$

wenn man noch erwägt, dass zufolge der Gleichung

$$n i=\delta_1(\cos\gamma_1+i\cdot\sin\gamma_1),$$

[328] $\cos\gamma_1=0$, $\sin\gamma_1=1$ ist. Folglich werden die Werthe von β' und δ' folgende sein:

$$\beta'=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,$$
$$\delta'=-(\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots).$$

Auf diese Weise sind nun die Grössen β' und δ' durch unendliche Reihen gefunden. Man kann sie aber auch in endlicher Gestalt ausdrücken. Denn aus den Gleichungen (15) folgt

$$\frac{e^{\delta k}\cdot\cos(\beta k)-1}{k}=\alpha\cos\varphi+\frac{k-1}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi+\frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\cos 3\varphi+\cdots,$$

$$\frac{e^{\delta k}\cdot\sin(\beta k)}{k}=\alpha\sin\varphi+\frac{k-1}{1\cdot 2}\alpha^2\sin 2\varphi$$
$$+\frac{(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^3\sin 3\varphi+\cdots.$$

Hieraus folgt, wenn man k sich Null nähern lässt:

$$(17)\quad\begin{cases}\delta=\alpha\cos\varphi-\frac{\alpha^2}{2}\cos 2\varphi+\frac{\alpha^3}{3}\cos 3\varphi-\cdots,\\ \beta=\alpha\sin\varphi-\frac{\alpha^2}{2}\sin 2\varphi+\frac{\alpha^3}{3}\sin 3\varphi-\cdots,\end{cases}$$

folglich

$$\beta'=+\delta,\ \delta'=-\beta.$$

Die Ausdrücke (14) gehen also in

$$(18)\quad\begin{cases}1+\lambda_1\alpha\cos\theta_1+\lambda_2\alpha^2\cos\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\cos\theta_\mu+\cdots\\ \qquad=e^{\delta k-\beta k'}\cos(\beta k+\delta k')=p,\\ \lambda_1\alpha\sin\theta_1+\lambda_2\alpha^2\sin\theta_2+\cdots+\lambda_\mu\alpha^\mu\sin\theta_\mu+\cdots\\ \qquad=e^{\delta k-\beta k'}\sin(\beta k+\delta k')=q\end{cases}$$

über, wo

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2),\quad\beta=\operatorname{arctang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cdot\cos\varphi}\right);$$

und da nun die Summe der gegebenen Reihe $=p+qi$ ist, so hat man

$$1+\frac{m}{1}\cdot x+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\cdot 2\ldots\ldots\mu}x^\mu$$
$$+\cdots=e^{\delta k-\beta k'}\cdot\{\cos(\beta k+\delta k')+i\cdot\sin(\beta k+\delta k')\}.$$

Nun ist $m=k+k'i$, $x=\alpha(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)=a+bi$, also $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$, $\alpha\cos\varphi=a$, $\alpha\sin\varphi=b$,

$$\delta=\tfrac{1}{2}\log(1+2a+a^2+b^2)=\tfrac{1}{2}\log[(1+a)^2+b^2],$$
$$\beta=\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right).$$

Substituirt man und setzt m statt k, und n statt k', so verwandelt sich der obige Ausdruck in folgenden:

[329]

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
&1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}(a+bi)^2\\
&+\frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+bi)^3+\cdots\\
&+\frac{(m+ni)(m-1+ni)\cdots(m-\mu+1+ni)}{1\cdot 2\cdots\cdots\mu}(a+bi)^\mu\\
&+\cdots\\
&=((1+a)^2+b^2)^{\frac{1}{2}m}\cdot e^{-n\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\cdot\\
&\left[\cos\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)\right.\\
&\left.+i\cdot\sin\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\tfrac{1}{2}n\log[(1+a)^2+b^2]\right)\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Dieser Ausdruck findet, wie wir sahen, ebenso wohl als (18), für jeden Werth von $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$, der kleiner als 1 ist, statt.

Setzt man z. B. $b=0$, $n=0$, so hat man den Ausdruck

$$(20)\qquad 1+\frac{m}{1}a+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}a^2+\cdots=(1+a)^m,$$

von welchem wir weiter unten Gebrauch machen werden.

IV.

Im Vorhergehenden wurde die Summe der gegebenen Reihe für die Fälle, wenn $\alpha=\sqrt{a^2+b^2}$ kleiner als 1 ist, gefunden. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen übrig, wenn jene Grösse gleich 1 ist.

Aus dem Lehrsatze (IV) folgte, dass, wenn man α der Grenze 1 beliebig sich nähern lässt, die Reihe

$$v_0+v_1\alpha+v_2\alpha^2+\cdots$$

zu gleicher Zeit der Grenze $v_0+v_1+v_2+\cdots$ sich nähert, sobald nur die letztere Reihe convergent ist. Lässt man daher in den Ausdrücken (18) α der Einheit sich nähern, so hat man:

$$(21) \begin{cases} 1+\lambda_1\cos\theta_1+\lambda_2\cos\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\cos\theta_\mu+\cdots\cdot \\ \qquad = e^{\delta_1 k-\beta_1 k'}\cdot\cos(\beta_1 k+\delta_1 k'), \\ \lambda_1\sin\theta_1+\lambda_2\sin\theta_2+\cdots\cdot+\lambda_\mu\sin\theta_\mu+\cdots\cdot \\ \qquad = e^{\delta_1 k-\beta_1 k'}\cdot\sin(\beta_1 k+\delta_1 k'), \end{cases}$$

wo δ_1 und β_1 die Grenzen der Grössen δ und β sind, vorausgesetzt, dass die in diesen Gleichungen enthaltenen Reihen convergiren.

Es ist aber klar, dass $\frac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)$ die Grenze von δ und $\operatorname{arctang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right) = \operatorname{arctang}\left(\frac{2\cdot\cos\frac{1}{2}\varphi\cdot\sin\frac{1}{2}\varphi}{2\cdot(\cos\frac{1}{2}\varphi)^2}\right)$ $= \operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi)$ die Grenze von β ist; folglich ist

$$(22) \qquad \delta_1 = \tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi), \quad \beta_1 = \operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Es bleibt also nur zu untersuchen übrig, in welchen Fällen die Reihen convergent sind. Zu dem Ende wollen wir drei Fälle unterscheiden: wenn $k = -1$ [**330**] ist oder zwischen -1 und $-\infty$ liegt; wenn k zwischen 0 und $+\infty$ liegt, und wenn $k = 0$ ist[11]) oder zwischen 0 und -1 liegt.

Erster Fall, wenn $k = -1$ ist oder zwischen -1 und $-\infty$ liegt. Es ist

$$\delta_\mu = \left(\left(\frac{k-\mu+1}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Setzt man also $k = -1-n$, so ist

$$\delta_\mu = \left(\left(\frac{n+\mu}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{k'}{\mu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hieraus ist zu sehen, dass δ_μ immer gleich oder[12]) grösser ist, als 1.

Man hat aber $\lambda_\mu = \delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\ldots\ldots\delta_\mu$, also wird λ_μ, für stets wachsende Werthe von μ, nicht gegen 0 hin convergiren, und folglich sind die Reihen (21), vermöge des Lehrsatzes (I), divergent.

Zweiter Fall, wenn k positiv ist.

Gesetzt, c sei eine positive Grösse, kleiner als k, so hat man

$$(\mu-k-1+c)^2 = (\mu-k-1)^2 + 2c(\mu-k-1) + c^2,$$

also

$$(\mu-k-1)^2+k'^2=(\mu-k-1+c)^2+k'^2-c^2$$
$$-2c(\mu-k-1).$$

Setzt man

$$\mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c},$$

so folgt, dass zugleich $k'^2-c^2-2c(\mu-k-1)$ negativ, und folglich

$$(\mu-k-1)^2+k'^2<(\mu-k-1+c)^2, \text{ d. h.}$$
$$\delta_\mu<\frac{\mu-k-1+c}{\mu}, \quad \delta_\mu<1-\frac{1+k-c}{\mu}$$

ist. Setzt man in der Gleichung (20) $a=\frac{1}{\mu}$, $m=-n$, so ist

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-n}=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n\cdot(1+n)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{\mu^2}-\cdots\cdot$$
$$=1-\frac{n}{\mu}+\frac{n\cdot(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{\mu^2}\left(1-\frac{2+n}{3\mu}\right)+\cdots\cdot$$

Daher ist, wenn man $n=1+k-c$ setzt, wie leicht zu sehen,

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{-1-k+c}>1-\frac{1+k-c}{\mu}\text{ [13]},$$

folglich

$$\delta_\mu<\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c}, \text{ wo } \mu>k+1-\tfrac{1}{2}c+\frac{k'^2}{2c}(=\varrho)\text{ [14]},$$

[**331**] also

$$\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c}, \text{ wo } \mu>0 \text{ ist.}$$

Setzt man der Reihe nach $\mu=1, 2, 3, \ldots\ldots, \mu$ und multiplicirt die Resultate mit einander, so erhält man:

$$\delta_{\varrho+1}\cdot\delta_{\varrho+2}\cdots\cdots\delta_{\varrho+\mu}<\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

also, da $\lambda_{\mu+\varrho}=\delta_1\cdot\delta_2\cdot\delta_3\cdots\cdots\delta_{\mu+\varrho}$,

$$\lambda_{\mu+\varrho}<\delta_1\cdot\delta_2\cdots\cdots\delta_\varrho\cdot\left(\frac{\varrho+1}{\varrho+\mu+1}\right)^{1+k-c},$$

folglich, wenn man $\mu=0, 1, 2, \ldots\ldots, \mu$ setzt,

$$\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho+1} + \cdots + \lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1 \cdot \delta_2 \cdots \delta_\varrho \cdot (\varrho+1)^{1+k-c}.$$
$$\left[\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}} + \frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}\right].$$

Setzt man jetzt in dem Ausdruck (20) $a = -\frac{1}{\varrho+\mu+1}$, $m = -k + c$, so hat man

$$\left(1 - \frac{1}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k} = 1 + \frac{k-c}{\varrho+\mu+1} + \frac{(k-c)(k-c+1)}{1 \cdot 2 \cdot (\varrho+\mu+1)^2} + \cdots;$$

folglich ist, wenn man sich erinnert, dass $k > c$:

$$\left(\frac{\varrho+\mu}{\varrho+\mu+1}\right)^{c-k} > 1 + \frac{k-c}{\varrho+\mu+1}.$$

Daraus folgt, wenn man mit $(k-c)(\varrho+\mu+1)^{k-c}$ dividirt:

$$\frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}} < \frac{1}{k-c}\left[\frac{1}{(\varrho+\mu)^{k-c}} - \frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right].$$

Dies giebt, wenn man $\mu = 0, 1, 2, \ldots\ldots, \mu$ setzt und addirt:

$$\frac{1}{(\varrho+1)^{1+k-c}} + \frac{1}{(\varrho+2)^{1+k-c}} + \cdots\cdots + \frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{1+k-c}}$$
$$< \frac{1}{k-c}\left[\frac{1}{\varrho^{k-c}} - \frac{1}{(\varrho+\mu+1)^{k-c}}\right] < \frac{1}{k-c} \cdot \frac{1}{\varrho^{k-c}}.$$

Hieraus folgt, dass

$$\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho+1} + \cdots + \lambda_{\varrho+\mu} < \delta_1\, \delta_2\, \delta_3 \ldots\ldots \delta_\varrho\, \frac{(\varrho+1)^{1+k-c}}{(k-c)\, \varrho^{k-c}},$$

welchen Werth auch μ haben mag. Daher wird die Reihe $1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots$, deren Glieder sämmtlich positiv sind, convergiren[15]), und folglich werden auch die Reihen

[**332**] $$1 + \lambda_1 \cos\theta_1 + \lambda_2 \cos\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \cos\theta_\mu + \cdots,$$
$$\lambda_1 \sin\theta_1 + \lambda_2 \sin\theta_2 + \cdots + \lambda_\mu \sin\theta_\mu + \cdots,$$

nach dem Lehrsatze (II), convergent sein.

Dritter Fall, wenn k gleich 0 ist oder zwischen Null und -1 liegt.

In diesem Falle werden die obigen Reihen convergent sein für jeden Werth von k, so lange nicht $\varphi = (2n+1)\pi$ ist.

Dies lässt sich, wie folgt, zeigen:

Es sei

$$m=k+k'i,\ x=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi,\ \text{und}$$
$$1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots\cdots+m_nx^n=p_n.$$

Durch Multiplication mit $1+x$ erhält man

$$1+(m_1+1)x+(m_2+m_1)x^2+(m_3+m_2)x^3+\cdots\cdots$$
$$+(m_n+m_{n-1})x^n+m_nx^{n+1}=p_n(1+x).$$

Wie bekannt, ist aber

$$m_1+1=(m+1)_1,\ m_2+m_1=(m+1)_2,\ \cdots\cdots$$
$$m_n+m_{n-1}=(m+1)_n,$$

also, wenn man substituirt:

$$1+(m+1)_1x+(m+1)_2x^2+\cdots\cdots+(m+1)_nx^n$$
$$=-m_nx^{n+1}+p_n(1+x).$$

Setzt man jetzt $n=\infty$, so ist das erste Glied dieser Gleichung, nach dem vorhergehenden Falle, eine convergente Reihe. Bezeichnet man sie durch s, so ist

$$s=p_n(1+x)-m_n[\cos(n+1)\varphi+i\cdot\sin(n+1)\varphi],$$

wo n unendlich gross ist. Nun lässt sich, wie in dem zweiten Falle, beweisen, dass $m_n=0$ ist für $n=\infty$. Man hat also

$$s=p\,(1+x),\ \text{wo}\ p=1+m_1x+m_2x^2+\cdots\cdots$$

Diese Gleichung giebt, wenn nicht $x+1=0$:

$$p=\frac{s}{1+x}.$$

Die Reihe p ist also alsdann convergent, und mithin sind es auch die obigen Reihen.

Ist $x+1=0$, so ist

$$1+\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi=0,\ \text{also}\ \sin\varphi=0,\ 1+\cos\varphi=0,$$

d. h. $\varphi=(2n+1)\pi$, wo n eine ganze, positive oder negative Zahl ist. Folglich sind die in Rede stehenden Reihen für $k=0$ sowie[16]) für jeden Werth von k zwischen 0 und -1 convergent, so lange nicht $\varphi=(2n+1)\pi$.

Ist $\varphi = (2n+1)\pi$: so sind die Reihen nothwendig divergent; denn wären sie alsdann convergent, so hätten sie zur Summe die Grenzen der Functionen.

[333] $$e^{k\delta - k'\beta}[\cos(k\beta + k'\delta) + i\cdot\sin(k\beta + k'\delta)],$$

wenn man darin α gegen Eins [17]) hin convergiren lässt, und $\varphi = (2n+1)\pi$ setzt:

Es ist aber:

$$\delta = \tfrac{1}{2}\log(1 + 2\alpha\cos\varphi + \alpha^2), \quad \beta = \operatorname{arctang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right),$$

folglich für $\varphi = (2n+1)\pi$:

$$\delta = \log(1-\alpha), \ \beta = 0.$$

Die in Rede stehende Function geht also in

$$(1-\alpha)^k[\cos(k'\log(1-\alpha)) + i\cdot\sin(k'\log(1-\alpha))]$$

über. Da aber $k = 0$ oder negativ ist, so ist klar, dass diese Function, wenn man α sich 1 nähern lässt, keine endliche und bestimmte Grenze hat. Die Reihen sind mithin divergent.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, dass die Reihen (21) für jeden Werth von φ stattfinden, wenn k positiv ist, und für jeden Werth von φ, für welchen $\cos\frac{1}{2}\varphi$ nicht Null ist, wenn $k = 0$ ist [16]) oder zwischen -1 und $+0$ liegt, welches auch immer der Werth von k' sein mag. In jedem anderen Falle sind die Reihen divergent. In dem Falle, welchen wir untersuchen, geht die allgemeine Reihe (19), wenn man $b^2 + a^2 = 1$, d. h. $b = \sqrt{1-a^2}$ setzt, über in:

$$(23)\left\{\begin{aligned}
&1 + \frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1}) + \frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}(a+\sqrt{a^2-1})^2 \\
&+ \frac{(m+ni)(m-1+ni)(m-2+ni)}{1\cdot 2\cdot 3}(a+\sqrt{a^2-1})^3 + \cdots \\
&\qquad = (2+2a)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\cdot \\
&\qquad \left[\cos\left[m\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right]\right. \\
&\qquad \left. + i\cdot\sin\left[m\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \tfrac{1}{2}n\log(2+2a)\right]\right].
\end{aligned}\right.$$

Folgendes ist eine Uebersicht der bisherigen Resultate:

I. Wenn die Reihe:

$$1+\frac{m+ni}{1}(a+bi)+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}(a+bi)^2+\cdots$$
$$+\frac{(m+ni)(m-1+ni)\ldots(m-\mu+1+ni)}{1\cdot 2\ldots\ldots\mu}(a+bi)^\mu+\cdots$$

convergirt, so ist ihre Summe: [334]

$$\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)}\cdot$$
$$\left[\cos\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right)\right.$$
$$\left.+i\cdot\sin\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)+\frac{n}{2}\log\left((1+a)^2+b^2\right)\right)\right].$$

II. Die Reihe ist convergent für jeden Werth von m und n, wenn die Grösse $\sqrt{a^2+b^2}$ kleiner ist als Eins. Ist $\sqrt{a^2+b^2}$ der Einheit gleich, so ist die Reihe convergent für jeden Werth von m zwischen -1 und $+\infty$, insofern nicht zugleich $a=-1$ ist. Ist $a=-1$, so muss m positiv sein. In jedem anderen Falle ist die gegebene Reihe divergent.

Als besondere Fälle muss man unterscheiden:

A. Wenn $n=0$.

Alsdann ist:

$$(24)\begin{cases}1+\frac{m}{1}(a+bi)+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}(a+bi)^2+\cdots\\ \quad=\left((1+a)^2+b^2\right)^{\frac{m}{2}}\cdot\left[\cos\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)\right)\right.\\ \quad\left.+i\cdot\sin\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{b}{1+a}\right)\right)\right].\end{cases}$$

Dieser Ausdruck giebt, wenn man $a=\alpha\cos\varphi$ und $b=\alpha\sin\varphi$ setzt und die reellen Glieder von den imaginären absondert:

$$(25)\begin{cases} 1+\frac{m}{1}\alpha\cos\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\cos 2\varphi+\cdots\cdot \\ =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}\cos\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)\right), \\ \frac{m}{1}\alpha\sin\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\alpha^2\sin 2\varphi+\cdots\cdot \\ =(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)^{\frac{1}{2}m}\sin\left(m\operatorname{arctang}\left(\frac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)\right). \end{cases}$$

B. Wenn $b=0$.

In diesem Falle geht der allgemeine Ausdruck in folgenden über:

$$(26)\begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}a+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}a^2+\cdots\cdot \\ =(1+a)^m\cdot\left[\cos\left[n\log(1+a)\right]+i\cdot\sin\left[n\log(1+a)\right]\right]. \end{cases}$$

C. Wenn $n=0$, $b=0$.

Alsdann ist:

$$(27)\ 1+\frac{m}{1}\cdot a+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot a^2+\frac{m\cdot(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^2+\cdots=(1+a)^m.$$

Dieser Ausdruck findet für jeden Werth von m statt, wenn der Zahlenwerth von a kleiner ist, als 1; ferner für jeden Werth von m zwischen -1 und $+\infty$, wenn $a=1$ ist, und für jeden positiven Werth von m, wenn $a=-1$ ist. Für andere Werthe von a und m ist das erste Glied eine divergente Reihe.

[**335**] Setzt man z. B. $a=+1$, resp. $a=-1$, so hat man

$$1+\frac{m}{1}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}+\cdots\cdot=2^m,$$

$$1-\frac{m}{1}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}-\cdots\cdot=0.$$

Die erste Gleichung gilt für jeden Werth von m, zwischen -1 und $+\infty$, und die zweite für jeden positiven Werth von m.

D. Wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$ [18]).

Alsdann ist

$$(28)\begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(a+\sqrt{a^2-1})+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}(a+\sqrt{a^2-1})^2 \\ +\cdots\cdot \\ =(2+2a)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}\cdot \\ \left[\cos\left[m\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right]\right. \\ \left.+i\cdot\sin\left[m\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\frac{n}{2}\log(2+2a)\right]\right]. \end{cases}$$

Setzt man hierin $a=\cos\varphi$, so erhält man:

$$(29)\begin{cases} 1+\frac{m+ni}{1}(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi) \\ +\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}(\cos 2\varphi+i\cdot\sin 2\varphi)+\cdots\cdot \\ =(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cdot e^{-n(\frac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)}\cdot \\ \cdot\left[\cos\left[m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right]\right. \\ \left.+i\cdot\sin\left[m(\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi)+\frac{n}{2}\log(2+2\cos\varphi)\right]\right] \end{cases}$$ [19]),

wenn man nämlich erwägt, dass

$$\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}=\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$$
$$=\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi-\varrho\pi,$$

vorausgesetzt, dass $\frac{1}{2}\varphi$ zwischen $\varrho\pi-\frac{\pi}{2}$ und $\varrho\pi+\frac{\pi}{2}$ liegt.

E. Wenn $\sqrt{a^2+b^2}=1$, $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$, $n=0$.

In diesem Falle giebt der Ausdruck:

$$(30)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}(\cos 2\varphi+i\cdot\sin 2\varphi)+\cdots\\&=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cdot\left(\cos m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)+i\cdot\sin m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\text{von } \frac{\varphi}{2}=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\varphi}{2}=\varrho\pi+\frac{\pi}{2},$$

oder, wenn man den reellen Theil von dem imaginären trennt:

$$(31)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m}{1}\cos\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos 2\varphi+\cdots\\&\quad=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cos m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right),\\&\frac{m}{1}\sin\varphi+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin 2\varphi+\cdots\\&\quad=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\sin m\left(\frac{\varphi}{2}-\varrho\pi\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\text{von } \frac{\varphi}{2}=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ bis } \frac{\varphi}{2}=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}.$$

[336] *F.* Wenn $a=0$, $b=\operatorname{tang}\varphi$.

In diesem Falle erhält man, wenn φ zwischen $+\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ liegt:

$$(32)\left\{\begin{aligned}&1+\frac{m+ni}{1}\cdot i\operatorname{tang}\varphi+\frac{(m+ni)(m-1+ni)}{1\cdot 2}\cdot(i\operatorname{tang}\varphi)^2+\cdots\\&\quad=(\cos\varphi)^{-m}\cdot e^{-n\varphi}\left[\cos(m\varphi-n\log\cos\varphi)\right.\\&\quad\quad\left.+i\cdot\sin(m\varphi-n\log\cos\varphi)\right].\end{aligned}\right.$$

V.

Es lässt sich aus den obigen Ausdrücken, durch schickliche Verwandlungen, noch eine Menge anderer ableiten, worunter sehr merkwürdige. Wir wollen einige davon ent-

wickeln. Für das weitere Detail möge man die oben angeführte Schrift von *Cauchy* nachlesen.

A.

Summirung der Reihen:

$$\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,$$
$$\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots$$

Wenn α grösser als Eins ist, so sind diese Reihen, wie leicht zu sehen, divergent. Ist α kleiner als Eins, so sind sie, wie wir oben sahen, convergent, und ihre Summen sind die Grössen β und δ des (§ III), d. h. es ist, wenn man für β und δ ihre durch die Gleichungen (18) gegebenen Werthe setzt:

$$(33)\quad\begin{cases}\tfrac{1}{2}\log(1+2\alpha\cos\varphi+\alpha^2)=\alpha\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\varphi\\ \qquad+\tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\varphi-\cdots,\\ \operatorname{arctang}\left(\dfrac{\alpha\sin\varphi}{1+\alpha\cos\varphi}\right)=\alpha\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\varphi\\ \qquad+\tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\varphi-\cdots\end{cases}$$

Um die Summen der Reihen zu erhalten, wenn $\alpha=+1$ oder -1, darf man nur α gegen diese Grenzen hin convergiren lassen.

Der erste Ausdruck giebt auf diese Weise:

$$(34)\quad\begin{cases}\tfrac{1}{2}\log(2+2\cos\varphi)=\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi+\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots,\\ \tfrac{1}{2}\log(2-2\cos\varphi)=-\cos\varphi-\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi-\tfrac{1}{3}\cos 3\varphi-\cdots,\end{cases}$$

und zwar sobald die Reihen auf der rechten Seite der Gleichungen convergent sind, welches, zufolge Lehrsatz (III) [20], für jeden Werth von φ der Fall ist, ausgenommen für $\varphi=(2\mu+1)\pi$ im ersten Ausdruck, und für $\varphi=2\mu\pi$ im zweiten, wo μ eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl bezeichnet.

Die zweite Formel giebt, wenn man φ zwischen π und $-\pi$ voraussetzt, und erwägt, dass alsdann:

$$\operatorname{arctang}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)=\operatorname{arctang}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi)=\tfrac{1}{2}\varphi:$$ [**337**]

$$(35)\quad\tfrac{1}{2}\varphi=\sin\varphi-\tfrac{1}{2}\sin 2\varphi+\tfrac{1}{3}\sin 3\varphi-\cdots$$
$$\text{von }\varphi=+\pi\text{ bis }\varphi=-\pi.$$

Ist $\varphi = \pi$ oder $= -\pi$, so reducirt sich die Reihe, wie man sieht, auf Null.

Hieraus folgt, dass die Function:

$$\sin\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi + \tfrac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots$$

die merkwürdige Eigenschaft hat, für die Werthe $\varphi = \pi$ und $\varphi = -\pi$ unstetig zu sein. Und in der That, wenn $\varphi = \pm\pi$, so ist die Function $= 0$. Wenn im Gegentheil $\varphi = \pm(\pi - \alpha)$, wo α positiv und kleiner als π [21]) ist, so ist der Werth der Function

$$\pm\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Der Ausdruck (33) enthält als besonderen Fall folgenden:

(36) $$\operatorname{arctang}\alpha = \alpha - \tfrac{1}{3}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\alpha^5 - \cdots,$$

welchen man findet, wenn man $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzt.

Dieser Ausdruck wird für jeden Werth von α gelten, von -1 bis $+1$, die Grenzen mit inbegriffen.

B.

Entwickelung von $\cos m\varphi$ und $\sin m\varphi$ nach Potenzen von $\operatorname{tang}\varphi$.

Man kann diese Entwickelung aus dem Ausdruck (32) herleiten. Setzt man nämlich $n = 0$, und trennt die reellen Theile von den imaginären, so erhält man, nachdem mit $(\cos\varphi)^m$ multiplicirt worden:

(37) $$\begin{cases} \cos m\varphi = (\cos\varphi)^m \left(1 - \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(\operatorname{tang}\varphi)^2 \right. \\ \qquad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\operatorname{tang}\varphi)^4 - \cdots\right), \\ \sin m\varphi = (\cos\varphi)^m \left(m(\operatorname{tang}\varphi) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\operatorname{tang}\varphi)^3 \right. \\ \qquad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\operatorname{tang}\varphi)^5 - \cdots\right) \end{cases}$$

und diese Gleichungen finden statt von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bis $\varphi = -\frac{\pi}{4}$,

für jeden Werth von m, wenn tang φ kleiner ist als 1. Ist tang $\varphi=\pm 1$, so gelten sie nur für ein zwischen -1 und $+\infty$ liegendes m [22]).

Sie sind alsdann

$$(38)\quad \begin{cases} \cos\left(m\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(1-\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\right. \\ \qquad \left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots\cdot\right), \\ \sin\left(m\cdot\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{2}}\left(m-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right. \\ \qquad \left.+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\cdots\cdot\right). \end{cases}$$

[**338**] C.

Entwickelung von $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$ in Reihen, geordnet nach Cosinus und Sinus vielfacher Bogen.

In der neusten Zeit haben sich mehrere Analysten mit der Entwickelung von $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$ beschäftigt. Bis jetzt sind aber diese Bemühungen, wenn ich nicht irre, noch nicht ganz gelungen. Man ist freilich zu Ausdrücken gelangt, welche unter gewissen Einschränkungen richtig sind, sie sind aber nicht hinreichend streng begründet worden.

Man kann sie sehr einfach aus den hier oben bewiesenen Ausdrücken herleiten.

Addirt man nämlich die beiden Gleichungen (31), nachdem man die erste mit $\cos\alpha$, die zweite mit $\sin\alpha$ multiplicirt hat, so erhält man:

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-\varphi)+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cos(\alpha-2\varphi)+\cdots\cdot$$
$$=(2+2\cos\varphi)^{\frac{m}{2}}\cdot\cos\left(\alpha-\frac{m\varphi}{2}+m\varrho\pi\right)$$
$$\text{von } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi-\frac{\pi}{2} \text{ bis } \tfrac{1}{2}\varphi=\varrho\pi+\frac{\pi}{2}.$$

Da nun $2+2\cos\varphi=4\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$, so erhält man, wenn man $\varphi=2x$ setzt:

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(\alpha-4x)+\cdots$$
$$=(2\cos x)^m\cdot\cos(\alpha-mx+2m\varrho\pi)\ ^{23)}$$
$$\text{von } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\text{ bis } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$\cos\alpha+\frac{m}{1}\cos(\alpha-2x)+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(\alpha-4x)+\cdots$$
$$=(-2\cos x)^m\cos[\alpha-mx+m(2\varrho+1)\pi]\ ^{23)}$$
$$\text{von } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2}\text{ bis } x=2\varrho\pi+\frac{3\pi}{2}.$$

Setzt man hierin 1) $\alpha=mx$; 2) $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; 3) $x-\frac{\pi}{2}$ statt x, nachher $\alpha=mx$; 4) $x-\frac{\pi}{2}$ statt x, nachher $\alpha=mx+\frac{\pi}{2}$; so ergiebt sich [24]):

1) $$(2\cos x)^m\cdot\cos 2m\varrho\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x+\cdots,$$

2) $$(2\cos x)^m\cdot\sin 2m\varrho\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x+\cdots$$
$$\text{von } x=2\varrho\pi-\frac{\pi}{2}\text{ bis } x=2\varrho\pi+\frac{\pi}{2};$$

3) $$(2\sin x)^m\cdot\cos m(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x-\cdots,$$

4) $$(2\sin x)^m\cdot\sin m(2\varrho+\tfrac{1}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x-\cdots,$$
$$\text{von } x=2\varrho\pi\text{ bis } x=(2\varrho+1)\pi;$$

5) $$(-2\cos x)^m\cdot\cos m(2\varrho+1)\pi=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x+\cdots,$$

6) $$(-2\cos x)^m\cdot\sin m(2\varrho+1)\pi=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x+\cdots$$
von $x=(2\varrho+\frac{1}{2})\pi$ bis $x=(2\varrho+\frac{3}{2})\pi$;

7) $$(-2\sin x)^m\cdot\cos m(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi=\cos mx-\frac{m}{1}\cos(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x-\cdots,$$

8) $$(-2\sin x)^m\cdot\sin m(2\varrho+\tfrac{3}{2})\pi=\sin mx-\frac{m}{1}\sin(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x-\cdots$$
von $x=(2\varrho+1)\pi$ bis $x=(2\varrho+2)\pi$.

Diese Formeln gelten auch noch für die Grenzwerthe von x, wenn m positiv ist. Liegt m zwischen -1 und 0, so muss man diese Grenzwerthe ausschliessen[25]).

Als besondere Fälle kann man folgende beide betrachten:

$$(2\cos x)^m=\cos mx+\frac{m}{1}\cos(m-2)x$$
$$+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cos(m-4)x+\cdots,$$

$$0=\sin mx+\frac{m}{1}\sin(m-2)x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\sin(m-4)x+\cdots$$

von $x=-\frac{\pi}{2}$ bis $x=+\frac{\pi}{2}$.

Anmerkungen.

Niels-Henrik Abel, geboren am 5. August 1802 zu Findö, einem Dorfe im Christiansandstift in Norwegen, in dem sein Vater protestantischer Pastor war, besuchte von 1815—1821 die Domschule in Christiania und studirte dann bis 1825 an der Universität der letztgenannten Stadt Mathematik, eine Wissenschaft, für die er schon als 16-jähriger Jüngling ein aussergewöhnliches Talent gezeigt hatte. Als Student zeichnete er sich so aus, dass ihm von der Norwegischen Regierung im Jahre 1825 ein Stipendium zur Fortsetzung seiner Studien in Deutschland und Frankreich verliehen wurde. Sein Aufenthalt in den genannten Ländern währte etwa $1\frac{1}{2}$ Jahre; den grössten Theil dieser Zeit verweilte er in Berlin, wo er neben *Steiner* einer der Hauptmitarbeiter des neu gegründeten Crelleschen Journals wurde*), und in Paris. Im Jahre 1827 kehrte *Abel* nach Christiania zurück und wurde dort im folgenden Jahre Vertreter des Prof. *Hansteen* an der Kriegsakademie und der Universität. Schon am 6. April 1829 erlag er zu Froland bei Arendal einem Lungenleiden; ein Ruf an die Universität Berlin traf ihn nicht mehr lebend an.

Obwohl *Abel* nur ein Alter von 26 Jahren erreicht hat, gehört er doch zu den bedeutendsten Mathematikern unseres Jahrhunderts. Seine wichtigsten Arbeiten bezogen sich auf die Theorie der elliptischen und der sogenannten »*Abel*'schen« Functionen, sowie auf die Lehre von den algebraischen Gleichungen. In letzterer Disciplin verdankt man *Abel* den Beweis der Unmöglichkeit, algebraische Gleichungen von höherem als dem vierten Grade allgemein aufzulösen. Für die Theorie der elliptischen Functionen waren seine Arbeiten neben denen von *Jacobi* grundlegend. Er war der erste,

*) Vgl. die Anmerkungen zu Heft 60 der Klassiker (S. 82).

der (vor *Jacobi*) die Nothwendigkeit einsah, neben dem elliptischen Integral die Umkehrung desselben zu betrachten, und der die doppelte Periodicität der so gewonnenen Functionen, der elliptischen Functionen, erkannte.

Von *Abel*'s wissenschaftlichen Arbeiten existiren zwei Gesammtausgaben; die erste derselben ist im Jahre 1839 von *Abel*'s Lehrer und Freund *Holmboe*, die zweite, sehr sorgfältig redigirte auf Kosten der Norwegischen Regierung 1881 von *L. Sylow* und *S. Lie* herausgegeben. Beide Ausgaben sind in französischer Sprache zu Christiania erschienen. Der Titel der letzteren lautet: Oeuvres complètes de *Niels-Henrik Abel*, nouvelle édition. — Eine ausführliche Biographie *Abel*'s ist 1885 von *Bjerknes* veröffentlicht [*Niels-Henrik Abel*, Paris, Gauthier Villars].

Die hier abgedruckte Arbeit über die binomische Reihe ist zwar nicht von so weittragender Bedeutung wie andere Arbeiten *Abel*'s. Doch hat sie ein grosses historisches Interesse einmal, weil in ihr zuerst die binomische Reihe für complexe Werthe des Exponenten untersucht und für diese, falls sie convergirt, summirt ist (*Cauchy* hatte in seinem »Cours d'analyse« zwar complexe Werthe der Grundzahl, aber nur reelle des Exponenten betrachtet), sodann weil sie in einer Zeit, wo man es bei Behandlung unendlicher Reihen oft an der nöthigen Strenge fehlen liess, ein Muster exacter Beweisführung war. Wichtig sind auch die im ersten Abschnitt enthaltenen allgemeinen Sätze über Reihen. Die Art, wie *Abel* sein Problem behandelt, ist so belehrend, dass das Studium unsrer Abhandlung auch heute noch Studirenden von dem grössten Nutzen sein kann.

Die Abhandlung ist, wie die meisten Arbeiten *Abel*'s, in französischer Sprache verfasst und von *Crelle* für sein Journal ins Deutsche übersetzt. In diesem ist sie zuerst veröffentlicht [*Crelle*, Journ. für Mathem. I, S. 311—339]. Der *Crelle*'sche Text ist nach Verbesserung der in ihm enthaltenen Druckfehler dem vorliegenden Abdruck zu Grunde gelegt; auch wurde jener Text mit dem der *Sylow-Lie*'schen Ausgabe verglichen und dort, wo sich Abweichungen von letzterem ergaben, geändert. Die hauptsächlichsten dieser Aenderungen sind weiter unten angegeben. — Hinsichtlich der Bezeichnung ist die Aenderung vorgenommen, dass $\sqrt{-1}$ überall durch i ersetzt ist.

Specielle Noten zum Text.

1) *Zu S. 5.* Der vollständige Titel des citirten Werkes ist: Cours d'analyse de l'école royale polytechnique; par *M. Augustin-Louis Cauchy.* I[re] Partie. Analyse algébrique, Paris 1821. — Weitere Theile des Werkes sind nicht erschienen.

2) *Zu S. 7.* Zum Verständniss des Beweises muss man beachten, dass ω keine bestimmte Grösse bezeichnet (vgl. S. 5 Anmerkung). Die Gleichung

$$\psi(\alpha) = \omega$$

sagt daher nur aus, dass $\psi(\alpha)$ für genügend grosse Werthe von m beliebig klein wird. In Folge dessen wird auch $\psi(\alpha) - \psi(\alpha - \beta)$ beliebig klein; ebenso wird, bei zweckmässiger Wahl von β, $\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha - \beta)$ beliebig klein, und daher gilt dasselbe von $f(\alpha) - f(\alpha - \beta)$.

3) *Zu S. 8.* Das Wort »convergent« fehlt bei *Crelle.*

4) *Zu S. 9.* Herr *Sylow* macht in der neuen Ausgabe von *Abel*'s Werken (Th. II, S. 303) darauf aufmerksam, dass der Lehrsatz V nur mit einer von *Abel* nicht hervorgehobenen Beschränkung gilt. Er sagt darüber:

»Der Beweis des Satzes V hat einen schwachen Punkt. Es genügt nämlich nicht, dass $\psi(x) = \omega$ ist, sondern es muss auch $\psi(x - \beta) = \omega$ sein. Nun ist es möglich, dass der Werth von m, der dieser Bedingung genügt, von β abhängig ist, und dass, wenn β gegen Null convergirt, m über alle Grenzen wächst. Falls dies stattfindet, ist die Annahme

$$\varphi(x) - \varphi(x - \beta) = \omega$$

unzulässig, da die Form der Function φ von β abhängt.

Indessen ist der Satz V richtig, wenn nur das allgemeine Glied $v_m \delta^m$ für alle Werthe von x zwischen $x - x'$ und $x + x''$ kleiner bleibt als ein und dieselbe positive Grösse M, die von m unabhängig ist. In diesem Falle sind nämlich die absoluten Werthe von $\psi(x)$ und $\psi(x - \beta)$ kleiner als $M \dfrac{\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^m}{1 - \frac{\alpha}{\delta}}$.

Man kann daher m gross genug annehmen, dass

$$\psi(x) < \tfrac{1}{3}\varepsilon \quad \text{und} \quad \psi(x - \beta) < \tfrac{1}{3}\varepsilon$$

ist, unter ε eine beliebig kleine Zahl verstanden. Weiter kann man für jeden bestimmten Werth von m, welcher der obigen Bedingung genügt, β klein genug annehmen, dass

$$\varphi(x) - \varphi(x-\beta) < \tfrac{1}{3}\varepsilon ,$$

mithin

$$f(x) - f(x-\beta) < \varepsilon$$

wird.«

Abel selbst scheint übrigens später erkannt zu haben, dass sein Beweis des Satzes V nicht genügt. Es geht das aus einer in seinen nachgelassenen Papieren gefundenen, in den Oeuvres Th. II, S. 201—203, abgedruckten Notiz hervor, welche die Grundzüge eines andern Beweises giebt. — Eine Verallgemeinerung des Satzes V ist von *P. Dubois-Reymond* gefunden und in den Mathemat. Annal. Bd. IV bewiesen.

5) *Zu S. 9.* *Abel* ist der Erste, der darauf aufmerksam gemacht hat, dass aus der Stetigkeit der Reihenglieder nicht ohne Weiteres auch die Stetigkeit der Reihe folgt, dass daher der angeführte Satz von *Cauchy* nicht allgemein richtig ist. — Die Unstetigkeiten der trigonometrischen Reihen sind insbesondere seit *Dirichlet* genauer untersucht.

6) *Zu S. 10.* Lehrsatz VI rührt von *Cauchy* her, die demselben auf S. 10 (unten) gegebene Fassung von *Abel.*

7) *Zu S. 16.* Bei *Abel* steht statt M der Buchstabe m; die Benutzung desselben an dieser Stelle erscheint aber unzweckmässig, weil m vorher in andrer Bedeutung gebraucht ist.

8) *Zu S. 16 u. 23.* Dass der hier ausgesprochene Satz richtig ist, obwohl der Lehrsatz V nach Anmerkung 4) nur mit einer Einschränkung gilt, lässt sich nach Herrn *Sylow* folgendermaassen beweisen.

Es seien ϱ, r, s drei positive Zahlen, so dass

$$\alpha < \varrho < 1 , \quad r > k , \quad s > k'$$

ist, wobei k und k' die absoluten Werthe dieser Grössen bezeichnen. Ferner seien δ'_μ, λ'_μ die Werthe, welche δ_μ, λ_μ annehmen, wenn in ihnen α, k, k' resp. durch ϱ, $-r$, s ersetzt werden. Dann ist

$$\delta'_\mu > \delta_\mu \quad \text{und daher} \quad \lambda'_\mu > \lambda_\mu .$$

Da nun die Reihe

$$1 + \varrho\lambda'_1 + \varrho^2\lambda'_2 + \varrho^3\lambda'_3 + \cdots$$

convergirt, so kann man eine Zahl M angeben, die grösser ist, als jedes Glied dieser Reihen; um so mehr ist also

$$M > \lambda_\mu \varrho^\mu \cos\theta_\mu$$

für jeden Werth von μ und für alle Werthe von k, k', die numerisch kleiner als r und s sind. Mithin ist der Lehrsatz V anwendbar. — Ebenso lässt sich die Anwendung dieses Satzes S. 23 rechtfertigen.

9) *Zu S. 18.* Diese Gleichung ist eine von *Holmboe* herrührende Einschaltung.

10) *Zu S. 23.* Hier steht bei *Crelle* fälschlich $-\sin(\mu\varphi)$ statt $+\sin(\mu\varphi)$. Ebenso haben in den Gleichungen S. 23 Z. 6 u. 7 v. u. die rechten Seiten bei *Crelle* falsches Vorzeichen.

11) *Zu S. 26.* Die Worte »wenn $k = 0$ ist« sind eingeschaltet, in Uebereinstimmung mit S. 28.

12) *Zu S. 26.* Die Worte »gleich oder« sind nach den Oeuvres eingeschaltet.

13) *Zu S. 27.* Bei *Crelle* steht hier $=$ (resp. im Druckfehlerverzeichnis $<$) statt $>$.

14) *Zu S. 27.* Zur Erläuterung diene Folgendes: Es ist nicht ganz zutreffend, $k + 1 - \frac{1}{2}c + \frac{k'^2}{2c} = \varrho$ zu setzen; denn ϱ bezeichnet eine ganze Zahl, während $k + 1 - \frac{1}{2}c + \frac{k'^2}{2c}$ keine ganze Zahl zu sein braucht. Zweckmässiger würde man sagen: der erste Werth von μ, welcher der Bedingung

$$\mu > k + 1 - \tfrac{1}{2}c + \frac{k'^2}{2c}$$

genügt, sei $\varrho + 1$; dann gilt die Ungleichung

$$\delta_\mu < \left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)^{1+k-c}$$

für $\mu = \varrho + 1$ und für jedes grössere μ. Dass ein solches μ mit $\varrho + \mu$ bezeichnet wird, wo jetzt $\mu > 0$, ist ebenfalls nicht ganz zweckmässig.

15) *Zu S. 28.* Zur Erläuterung diene Folgendes: $\lambda_\varrho + \lambda_{\varrho+1} + \cdots + \lambda_{\varrho+\mu}$ ist für jedes μ kleiner als ein endlicher, von μ unabhängiger Werth. Das bleibt auch richtig, wenn μ über alle Grenzen wächst.

16) *Zu S. 29 u. 30.* Die Worte »für $k = 0$ sowie« fehlen bei *Crelle.* — Eine ähnliche Einschaltung musste S. 30 Z. 19 gemacht werden.

17) *Zu S. 30.* Bei *Crelle* steht hier u. Z. 14 dieser Seite Null statt Eins. — In den Formeln dieser Seite steht bei *Crelle* mehrfach δ_1 statt des richtigen β. Auch andere Druckfehler mussten hier verbessert werden.

18) *Zu S. 32.* Bei *Crelle* steht hinter $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$ noch $(a = \cos\varphi,\ b = \sin\varphi)$. Das ist hier fortgelassen.

19) *Zu S. 33.* In diesen Formeln steht bei *Crelle* fälschlich $\varphi - \varrho\pi$ statt $\frac{1}{2}\varphi - \varrho\pi$. Auch in den weiterhin folgenden Formeln war mehrfach φ durch $\frac{1}{2}\varphi$ zu ersetzen.

20) *Zu S. 35.* Bei *Crelle* steht Lehrsatz (II) statt (III). Dass III richtig ist, zeigt Herr *Sylow* in den Oeuvres II, S. 304.

21) *Zu S. 36.* Bei *Crelle* steht fälschlich 1 statt π.

22) *Zu S. 37.* Bei *Crelle* steht: »für ein positives m zwischen -1 und ∞.« Auch die Wortfassung der Ueberschrift von *Crelle* (Z. 10, 11 dieser Seite) ist etwas geändert.

23) *Zu S. 38.* Setzt man in der letzten Gleichung von S. 37 $\alpha = 2x$, so kommt zunächst

$$(4\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} \cos[\alpha - mx + m\varrho\pi],$$

wo x zwischen $\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ und $\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$ liegt. Nun ist

$$(4\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} = (2\cos x)^m, \quad \text{falls } \cos x \text{ positiv ist,}$$

dagegen

$$(4\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} = (-2\cos x)^m, \quad \text{falls } \cos x \text{ negativ ist.}$$

Damit der erste Fall eintritt, muss für ϱ eine gerade Zahl (2ϱ), im zweiten Falle dagegen eine ungerade Zahl $(2\varrho + 1)$ genommen werden.

In den beiden ersten Formeln S. 38 fehlt übrigens bei *Crelle* im letzten Gliede rechts der Factor π.

24) *Zu S. 38.* Z. 7—9 lauten bei *Crelle*: »Setzt man 1) $\alpha = mx$; 2) $\alpha = mx + \frac{\pi}{2}$; 3) $x = y - \frac{\pi}{2}$; 4) $\alpha = my$; so ist:«

25) *Zu S. 39.* Die Zeilen 11—14 lauten bei *Crelle* folgendermaassen:

»Diese Ausdrücke gelten für jeden Werth von x, wenn m positiv ist. Liegt m zwischen -1 und 0, so muss man 1) unter den Werthen von x in den Formeln (1), (2), (5), (6)

die Werthe $x = 2\varrho\pi - \frac{\pi}{2}$ und $x = 2\varrho\pi + \frac{\pi}{2}$, 2) in den Formeln (3), (4), (7), (8) die Werthe $x = 2\varrho\pi$ und $x = (2\varrho + 1)\pi$ ausnehmen.

In jedem andern Falle sind die in Rede stehenden Reihen convergent.«

Dieser Fassung ist die der Oeuvres, die oben im Texte benutzt ist, vorgezogen. —

Z. 4 v. u. steht bei *Crelle* fälschlich $(\cos x)^m$ statt $(2 \cos x)^m$.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Um die Anschaffung der Klassiker der exakten Wissenschaften Jedem zu ermöglichen und ihnen weiteste Verbreitung zu sichern, ist der Preis für den Druckbogen à 16 Seiten von jetzt an auf ℳ —.25 festgesetzt worden. Textliche Abbildungen und Tafeln jedoch machen eine entsprechende Preiserhöhung erforderlich.

Aus dem Gebiete der

Mathematik

sind bis jetzt erschienen:

Nr. 5. **C. F. Gauss,** Flächentheorie. (1827.) Deutsch herausg. v. A. Wangerin. (62 S.) ℳ —.80.

» 14. **C. F. Gauss,** Die 4 Beweise der Zerlegung ganzer algebr. Functionen etc. (1799—1849.) Herausg. v. E. Netto. Mit 1 Taf. (81 S.) ℳ 1.50.

» 17. **A. Bravais,** Abhandlungen über symmetr. Polyeder. (1849.) Übers. und in Gemeinschaft mit P. Groth herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 1 Taf. (50 S.) ℳ 1.—.

» 19. Üb. d. Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von **Laplace** (1782), **Ivory** (1809), **Gauss** (1813), **Chasles** (1838) und **Dirichlet** (1839). Herausg. von A. Wangerin. (118 S.) ℳ 2.—.

» 46. Abhandlungen über Variations-Rechnung. I. Theil: Abhandlungen von **Joh. Bernoulli** (1696), **Jac. Bernoulli** (1697) und **Leonhard Euler** (1744). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 19 Textfiguren. (144 S.) ℳ 2.—.

» 47. —— —— II. Theil: Abhandlungen von **Lagrange** (1762, 1770), **Legendre** (1786) und **Jacobi** (1837). Herausgegeben von P. Stäckel. Mit 12 Textfiguren. (110 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner,** Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 64. **C. G. J. Jacobi,** Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abel'schen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.). ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain,** Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel,** Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 71. **N. H. Abel,** Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot x^3+\cdots\cdot$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.